

ЗАДАНИЕ К1-30

Дано: уравнения движения точки в плоскости xOy : $x = -\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$, $y = 3\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) + 4$; $t_1 = 1$ с.

Найти: уравнение траектории точки; скорость и ускорение, касательное и нормальное ускорения, радиус кривизны траектории в момент $t = t_1$.

РЕШЕНИЕ:

1. Уравнение траектории.

Для определения уравнения траектории точки исключим время t из заданных уравнений движения.

Воспользуемся свойством тригонометрических функций $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Тогда, учитывая, что $\sin^2\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) = \left(\frac{y-4}{3}\right)^2$ и $\cos^2\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) = x^2$, получим $\left(\frac{y-4}{3}\right)^2 + x^2 = 1$.

Это уравнение эллипса с большой полуосью равной 3 см и малой – 1 см.

Положение точки при $t_1 = 1$ с:

$$x = -\cos\left(\frac{\pi \cdot 1^2}{6}\right) = -0,866 \text{ (м)}, \quad y = 3\sin\left(\frac{\pi \cdot 1^2}{6}\right) + 4 = 5,75 \text{ (м)}$$

2. Скорость точки.

Скорость найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \pi \cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right).$$

При $t = t_1 = 1$ с

$$v_x = \frac{3,14 \cdot 1}{3} \sin\left(\frac{\pi \cdot 1^2}{6}\right) \approx 0,52 \text{ (м/с)}, \quad v_y = 3,14 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1^2}{6}\right) \approx 2,72 \text{ (м/с)}$$

Модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0,52^2 + 2,72^2} \approx 2,77 \text{ (м/с)}$$

3. Ускорение точки.

Находим аналогично:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2 t^2}{9} \cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right), \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2 t^2}{3} \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$$

При $t = t_1 = 1$ с

$$a_x = \frac{3,14^2 \cdot 1^2}{9} \cos\left(\frac{\pi \cdot 1^2}{6}\right) \approx 0,95 \text{ (м/с}^2\text{)}, \quad a_y = -\frac{3,14^2 \cdot 1^2}{3} \sin\left(\frac{\pi \cdot 1^2}{6}\right) \approx -1,64 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0,95^2 + 1,64^2} \approx 1,9 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

4. Касательное ускорение.

Используем формулу $a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}$

При $t = t_1 = 1$ с

$$a_\tau = \frac{0,52 \cdot 0,95 - 2,72 \cdot 1,64}{2,77} \approx -1,43 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

5. Нормальное ускорение.

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{1,9^2 - 1,43^2} \approx 1,25 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

6. Радиус кривизны траектории.

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2,77^2}{1,25} \approx 6,14 \text{ (м)}$$

v	a	a_τ	a_n	ρ
м/с	м/с ²			м
2,77	1,9	-1,43	1,25	6,14

